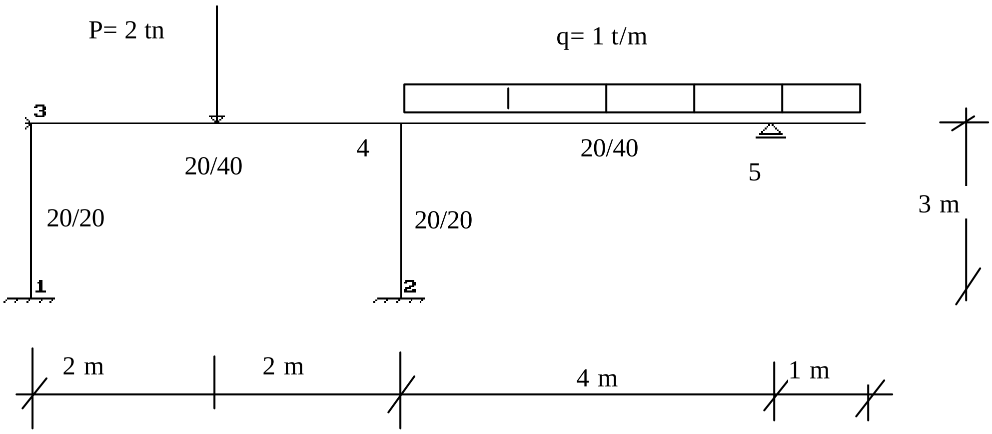
EJERCICIO DE APLICACIÓN METODO DE LAS DEFORMACIONES



Características Geométricas de las barras
Barra 1-3 = Barra 2-4
$I_{1-3} = I_{2-4} = Io = 13333\ cm^4$

Barra 3-4 = Barra 4 -5
$I_{3-4} = I_{4-5} = 106666.66\ cm^4$

La ecuación de recurrencia vista en teoría era:

$$M_{ij} = M^o_{ij} + \frac{2.E.I_{i,j}}{L_{i,j}}\left[2.\omega_i + \omega j - 3.\psi_{ij}\right]$$

multiplicando y dividiendo por Io el segundo miembro de la ecuación anterior obtenemos:

$$M_{ij} = M^o_{ij} + \frac{2.E.I_{ij}}{L_{ij}}.\frac{I_o}{I_o}\left[2.\omega_i + \omega_j - 3.\psi_{ij}\right] = M^o_{ij} + \frac{2.\alpha_{ij}}{L_{ij}}\left[2.\bar{\omega}_i + \bar{\omega}_j - 3.\bar{\psi}_{ij}\right]$$

siendo:

$\alpha_{ij} = I_{ij} / Io$

$\bar{\omega}_i = \omega_i.E.I_o$ $\quad \bar{\omega}_j = \omega_j.E.I_o$ $\quad \bar{\psi}_{ij} = \psi_{ji}.E.I_o$

Datos:
por condición de vínculo
$\omega_1 = \omega_2 = \psi_{34} = \psi_{45} = 0$

Incógnitas:
$\omega_3 ; \omega_4 ; \omega_5 ; \psi_{13} \ ; \psi_{24}$

Cómo el método no considera deformaciones por esfuerzo normal, entonces el desplazamiento horizontal de los nudos 3, 4 y 5 será el mismo.
$\Delta = \Delta x_3 = \Delta\ x_4 = \Delta\ x_5$

Luego:
$\Delta = L_{13}.\psi_{13} = L_{24}\ \psi_{24} \rightarrow \psi_{13} = L_{24} / L_{13}.\psi_{24} = \psi_{24}$

Cálculo de los $\underline{M^{o}_{i,j}}$

$$M^{o}_{34} = -M^{o}_{43} = P.l / 8 = 1.00 \text{ tm}$$

$$M^{o}_{45} = -M^{o}_{54} = q.l^{2} / 12 = 2.67 \text{ tm}$$

Planteamos las ecuaciones de recurrencia para cada barra

$\alpha_{13} = \alpha_{24} = 1.00 \qquad \alpha_{34} = \alpha_{45} = 8.00$

Barra 1-3

$$M_{13} = M^{o}_{13} + \frac{2.\alpha_{13}}{L_{13}}\left[2.\bar{\omega}_1 + \bar{\omega}_3 - 3.\bar{\psi}_{13}\right] = 0.66\bar{\omega}_3 - 2\bar{\psi}_{13}$$

$$M_{31} = +1.33\bar{\omega}_3 - 2.00\bar{\psi}_{13}$$

Barra 2-4

$$M_{24} = +0.66\bar{\omega}_4 - 2.00\bar{\psi}_{13}$$

$$M_{42} = 1.33\bar{\omega}_4 - 2.00\bar{\psi}_{13}$$

Barra 3-4

$$M_{34} = 1.00 + \frac{2x8}{4}\left[2.\bar{\omega}_3 + \bar{\omega}_4 - 3x0\right] = 1 + 8\bar{\omega}_3 + 4\bar{\omega}_4$$

$$M_{43} = -1.00 + \frac{2x8}{4}\left[2.\bar{\omega}_4 + \bar{\omega}_3 - 3x0\right] = -1 + 4\bar{\omega}_3 + 8\bar{\omega}_4$$

Barra 4-5

$$M_{45} = +2.67 + \frac{2x8}{4}\left[2.\bar{\omega}_4 + \bar{\omega}_5 - 3x0\right] = +2.67 + 8\bar{\omega}_4 + 4\bar{\omega}_5$$

$$M_{54} = -2.67 + \frac{2x8}{4}\left[2.\bar{\omega}_5 + \bar{\omega}_4 - 3x0\right] = -2.67 + 4\bar{\omega}_4 + 8\bar{\omega}_5$$

Planteo de las ecuaciones de equilibrio

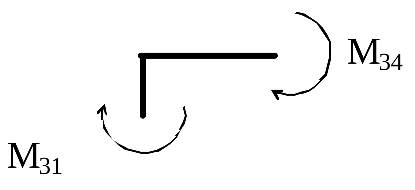
Sumatoria de momentos en nudos 3, 4, y 5 igual a cero, tenemos tres ecuaciones y cuatro incógnitas, necesito una ecuación de equilibrio adicional → ecuación de piso (sumatoria de fuerzas horizontales igual a cero)

Equilibrio de momentos en el nudo 3

$\sum M_3 = 0$

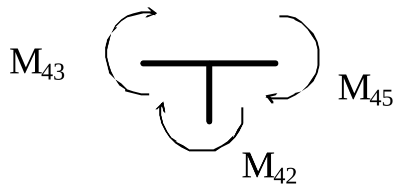
$M_{31} + M_{34} = 0$

Para hacer el equilibrio de nudos tomamos
Acción de barra sobre nudo
(positivo en sentido horario)



M_{31} →		$+1.33\,\omega_3$		$-2.00\psi_{13}$
M_{34} →	$+1.00$	$+8.00\,\omega_3$	$+4.00\omega_4$	
	$+1.00$	$+9.33\omega_3$	$+4.00\omega_4$	$-2.00\psi_{13} = 0$ (I)

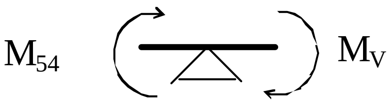
Equilibrio de momentos en el nudo 4



$$\sum M_4 = 0$$
$$M_{43} + M_{42} + M_{45} = 0$$

M_{43} → +	-1.00	$+4.00\,\omega_3$	$+8.00\,\omega_4$		
M_{42} → +			$+1.33\,\omega_4$		$-2.00\psi_{13}$
M_{45} →	$+2.67$		$+8.00\,\omega_4$	$+4.00\,\omega_5$	
	$+1.67$	$+4.00\omega_3$	$+17.33\omega_4$	$+4.00\omega_5$	$-2.00\psi_{13} = 0$ (II)

Equilibrio de momentos en el nudo 5

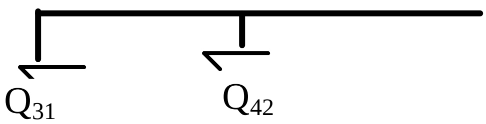


$$\sum M_5 = 0$$
$$M_{54} + M_V = 0$$

M_{54} → +	-2.67	$+4.00\,\omega_4$	$+8.00\,\omega_5$	
Mv →	$+1.00$			
	-1.67	$+4.00\omega_4$	$+8.00\omega_5 = 0$	(III)

Ecuación de piso

$$\sum F_H = 0$$
$$+ Q_{31} + Q_{42} = 0$$



Recordando que $Q_{ij} = Q^o_{ij} + Q^M_{ij}$
En este caso los Q^o_{ij} son cero por no haber cargas aplicadas sobre las barras 1-3 y 2-4.
A los Q^M_{ij} los tomo positivos por que todavía no conozco su signo
Recordando la convención de que los momentos son positivos, para una acción de nudo sobre barras, si tienen sentido de giro antihorario.
Nota. Como queremos calcular el equilibrio de la barra para obtener sus esfuerzos de corte, conviene trabajar con acción de nudo sobre barra.
Entonces:

$Q^M_{31} = (M_{31} + M_{13}) / L_{13} =$

Q_{31} →	$0.66\,\omega_3$		$-1.33\,\psi_{13}$	
Q_{42} →		$0.66\,\omega_4$	$-1.33\,\psi_{13}$	
	$0.66\omega_3$	$0.66\,\omega_4$	$-2.67\,\psi_{13} = 0$	(IV)

Resolviendo el sistema de ecuaciones obtenemos:

$\bar{\omega}_3 = -0.051068$ $\quad\quad$ $\bar{\omega}_5 = 0.2871632$

$\bar{\omega}_4 = -0.156826$ $\quad\quad$ $\bar{\psi}_{13} = -0.0519738$

Reemplazando los valores de las rotaciones en las ecuaciones de recurrencia obtenemos los momentos flectores en las barras y a partir de los mismos los esfuerzos de corte, normal y diagrama del cuerpo libre.

$M_{13} = 0.07$ tm	$M_{34} = -0.034$ tm	$M_{24} = -0.0006$ tm	$M_{45} = 2.56$ tm
$M_{31} = 0.036$ tm	$M_{43} = -2.46$ tm	$M_{42} = -0.105$ tm	$M_{54} = -1.00$ tm

DIAGRAMA DE MOMENTOS

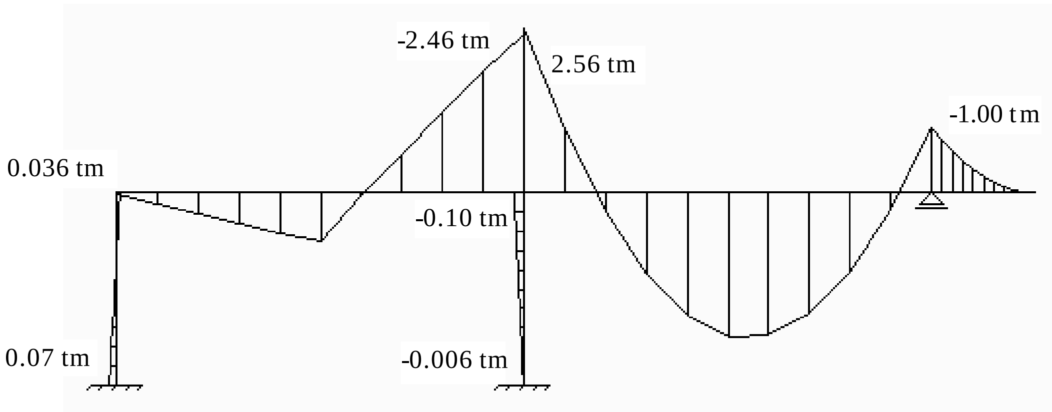


DIAGRAMA DE CORTE

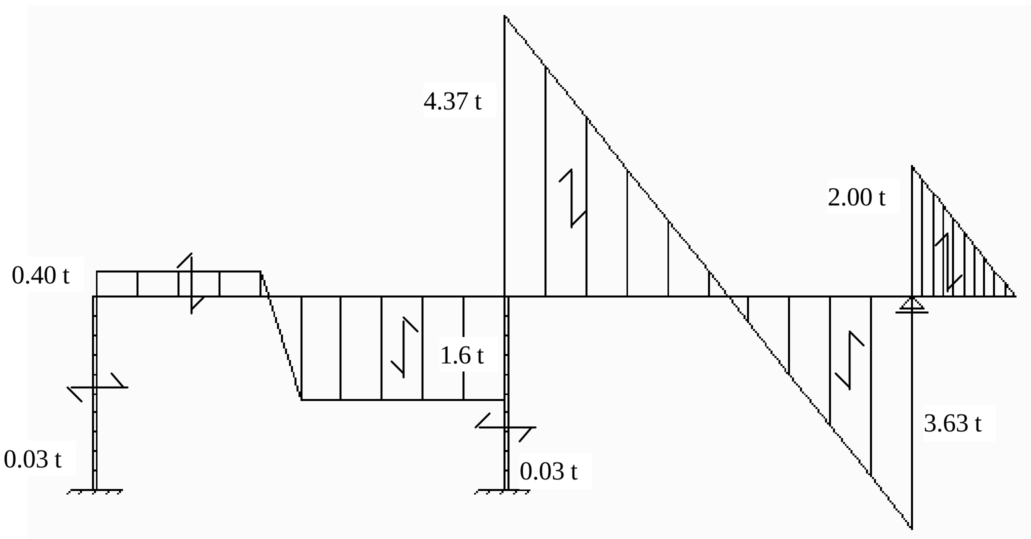
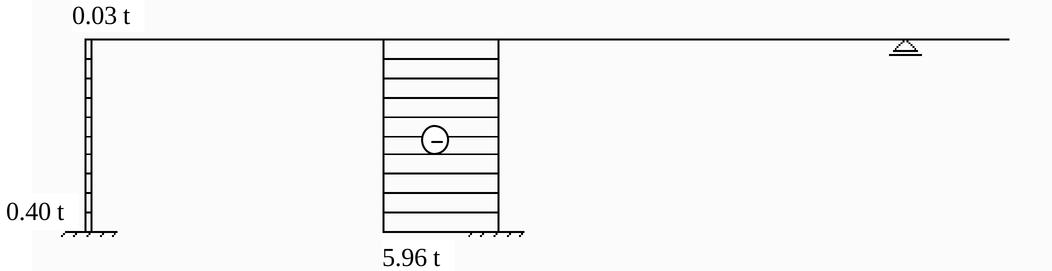


DIAGRAMA DE N



ESTRUCTURA DEFORMADA

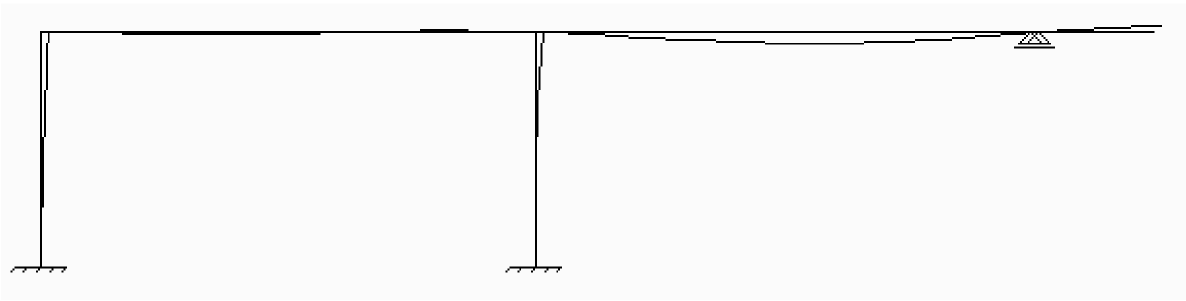
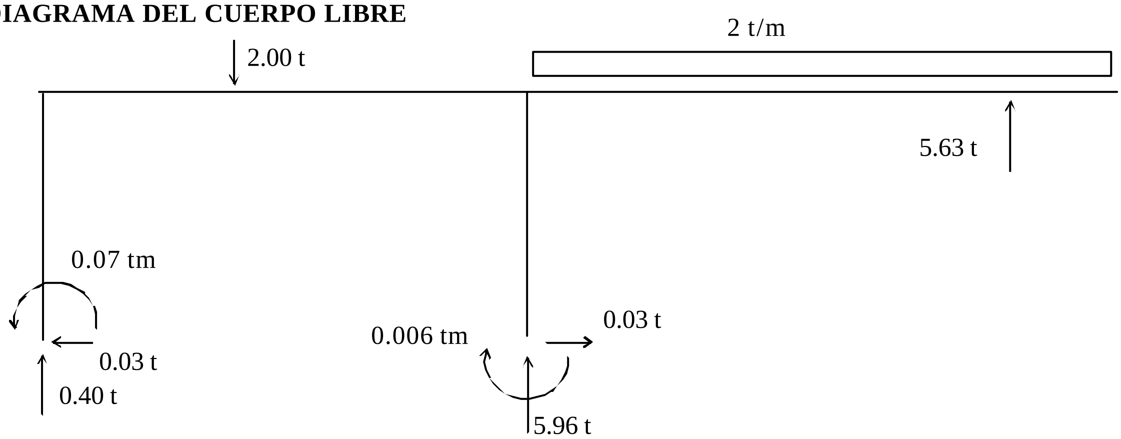


DIAGRAMA DEL CUERPO LIBRE

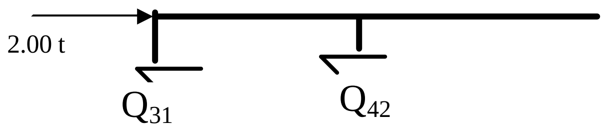


OTRO EJEMPLO

Veamos la misma estructura pero ahora con una carga horizontal de2 tn en el nudo 3, la ecuación de piso queda:

$\sum F_H = 0$

$+ Q_{31} + Q_{42} - 2 = 0$



$$-2.00 \quad +0.66\omega_3 \quad +0.66\,\omega_4 \quad -2.67\,\psi_{13}=0 \qquad \text{(IV')}$$

Resolviendo el sistema de ecuaciones obtenemos:

$\bar{\omega}_3 = -0.194193$ $\bar{\omega}_5 = 0.3208$

$\bar{\omega}_4 = -0.224179$ $\bar{\psi}_{13} = -0.8546$

Reemplazando los valores de las rotaciones en las ecuaciones de recurrencia obtenemos los momentos flectores en las barras y a partir de los mismos los esfuerzos de corte, normal y diagrama del cuerpo libre.

M_{13} = 1.58 tm	M_{34} = -1.45 tm	M_{24} = 1.56 tm	M_{45} = 2.16 tm
M_{31}= 1.45 tm	M_{43} = -3.57 tm	M_{42} = 1.41 tm	M_{54} = -1.00 tm

DIAGRAMA DE MOMENTOS

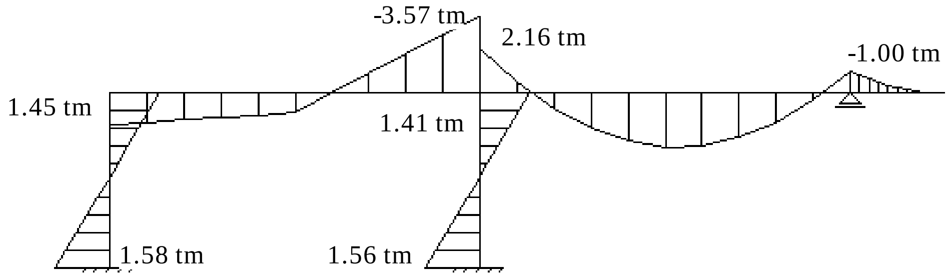


DIAGRAMA DE CORTE

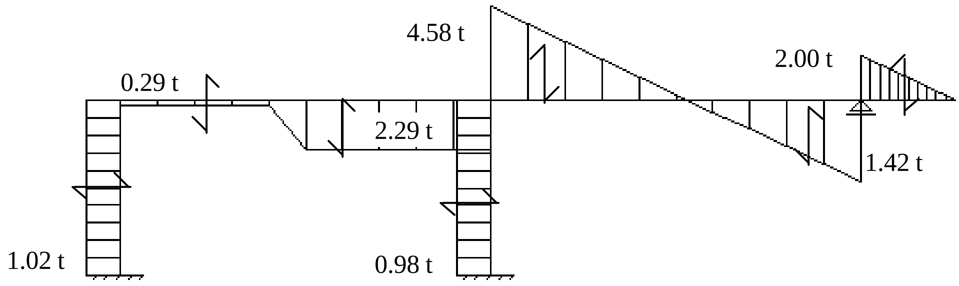
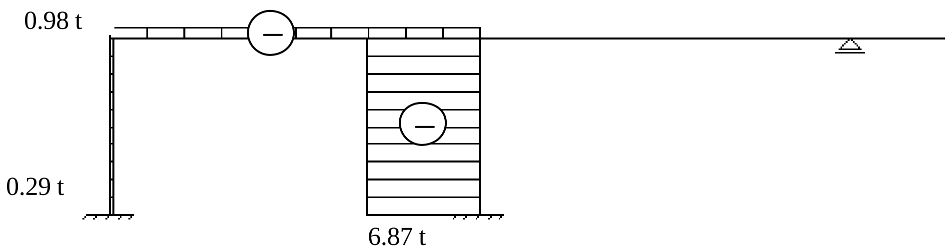


DIAGRAMA DE N



DEFORMADA

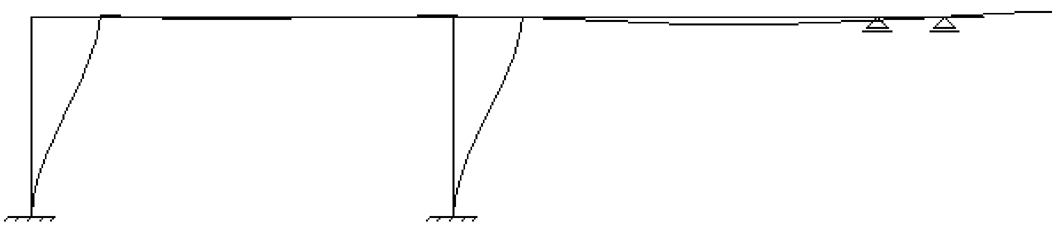


DIAGRAMA DEL CUERPO LIBRE